NUMERISCHE INTEGRATION IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Siegfried K. Grosser

Über die Jahrzehnte hat die Numerische Integration in den Lehrplänen und Lehrbüchern der Gymnasien bzw. der Höheren Technischen Lehranstalten - vor allem aber in letzteren - einen gewissen bescheidenen Stellenwert besessen, der von den dort verwendeten Recheninstrumenten unabhängig war. Wie weit sie im tatsächlichen Unterrichtsgeschehen in Mathematik vorkam, bzw. in welchem Ausmaß sie - was wünschenswert wäre und immer gewesen wäre - in die Methodik der Einführung des Integralbegriffes eingebunden wurde, das hing damals wie heute vom Kenntnisstand bzw. von der einschlägigen Bereitschaft des Lehrers ab.

In den letzten 10 bis 15 Jahren ist allerdings der Mathematikunterricht einem zunächst rein technisch bedingten Veränderungsdruck ausgesetzt gewesen, dessen Intensität zunimmt und sehr bald - dies ist eine rein persönliche Voraussage, die sich aber auf die Meinung vieler stützt - ins Qualitative umschlagen dürfte, das heißt, kurrikulare Konsequenzen haben wird.

Die neuen technischen Parameter im Unterrichtsgeschehen sind natürlich der Taschenrechner und der Klein- bzw. Personalcomputer. Während der Taschenrechner allerdings eine rein numerische Funktion hatte und hat (so daß er einfach die Wirkung von Logarithmentafel und Rechenstab potenzierte), kommen dem PC Funktionen des symbolischen Rechnens, der Termumformung und Algebraisierung sowie der bildlichen Darstellung zu, die so ziemlich alle Lehrstoffanordnungen und didaktischen Arrangements des traditionellen Unterrichts in Frage stellen könnten. Daß dies noch nicht geschehen ist, liegt am (glücklicherweise vorhandenen) Trägheitsmoment der Unterrichtsabläufe sowie am Fehlen geeigneter Software.

Gerade am Beispiel der Numerischen Integration läßt sich allerdings die These begründen, daß hier nicht nur ein riesiges Störpotential vorliegt, sondern daß auch die Möglichkeit der Bereicherung und Vertiefung der geltenden Unterrichtspraxis anhand des neuen Mediums besteht.

§1. Ausgewählte Methoden in neuer Sicht

Während die Trapez-Regel und Rechtecks-Regel auch für den Anfänger unmittelbar verständlich sind, ist das Verständnis für die Herleitung der Simpson -Regel, um das wichtigste Beispiel zu nennen, bei Gymnasiasten im allgemeinen nicht vorhanden, weil der zugrundeliegende Prozeß der Approximation der Funktion durch Parabelsegmente algebraisch nicht so leicht deduzierbar ist; allerdings kann das "fertige Produkt", die Formel, dann doch auch ohne Schwierigkeit angewendet werden. Die Idee, durch Verwendung von approximierenden Polynomfunktionen aufsteigenden Grades immer bessere Resultate zu erhalten, stößt eben schon bei niedrigem Grad auf "natürliche" Grenzen. Vergegenwärtigen wir uns aber zunächst einige Tatsachen, die bei der Gewinnung von einschlägigen Approximationsverfahren in Rechnung gestellt werden müssen:

(1) Jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ ist Riemann -integrierbar

(2) Jede Funktion mit konvergenter Taylor-Reihe kann durch Polynomfunktionen (Partialsummen) approximiert werden.

(3) Gemäß dem Satz von Weierstraß kann sogar jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ durch Polynomfunktionen gleichmäßig approximiert werden; allerdings ist der für die Approximation in (2) zu durchlaufende Algorithmus leichter durchschaubar und weniger komplex.

(4) Jede Polynomfunktion kann exakt integriert werden, aber bei hohem Grad ist das Verfahren zeitraubend und aufwendig.

Aus den zitierten Gründen wählt man also zum Zweck der Approximation beim Integrieren Polynomfunktionen möglichst niedrigen Grades.

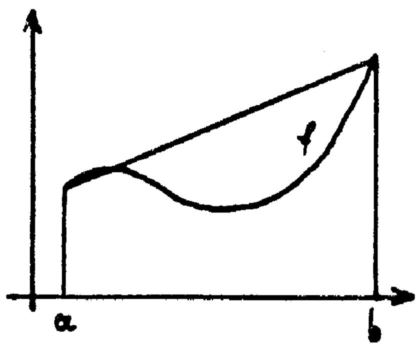
Eine bedeutende Erleichterung ergibt sich aber aus der Verwendung einer alternativen Methode, bei der grundsätzlich nur stückweise konstante Funktionen, mit einer gewissen Gewichtung versehen, verwendet werden. Zugleich soll nun in §2. demonstriert werden, daß die Verwendung dieser Methode auch in relativ einfachen Schritten zu einer Fehlerabschätzung führt; letzteres Problem ist bekanntlich die wahre Achillesferse aller Methoden der numerischen Integration (siehe z.B. [1,2]).

Aus Gründen der Einfachheit und Übersichtlichkeit beschränken wir uns bei der Diskussion auf die folgenden Methoden: (I) Trapez-Regel, (II) Rechteck-Regel, (III) Simpson -Regel (IV) Gauß-Regel.

§2. Formeln und Sätze

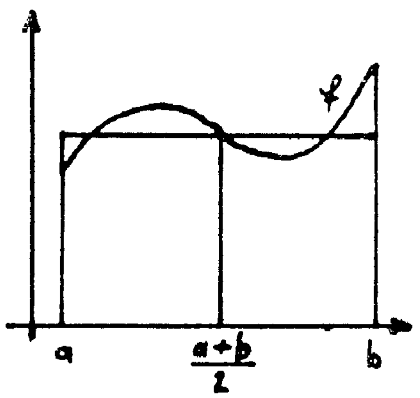
Die vier zitieren Formeln samt Fehlerabschätzung werden nun in zwei Schritten - erst für das ganze Intervall, dann für Partitionen - entwickelt; die jeweils angewandte Gewichtung ist sowohl aus der Skizze als auch aus der zugehörigen Formel ersichtlich

(1) TRAPEZ-REGEL



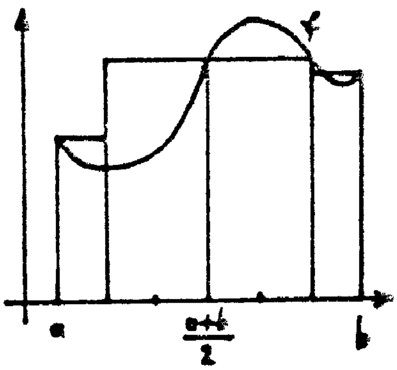
$$FL_{TR}(f,[a,b]) := \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

(2) RECHTECK-REGEL



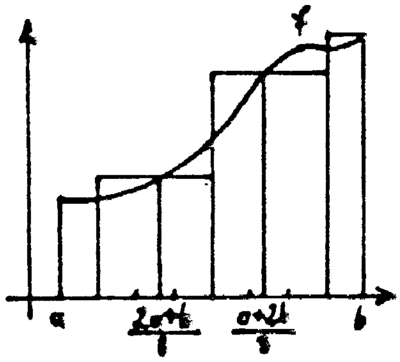
$$FL_{RE}(f,[a,b]) := (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

(3) SIMPSON-REGEL



$$FL_{SI}(f,[a,b]) := \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

(4) GAUSS-REGEL



$$FL_{GA}(f,[a,b]) := \frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]$$

BEMERKUNG Gauß hat mehrere Integrationsformeln hergeleitet; die obige Regel (4) bietet aber einen interessanten Vergleich mit der Simpson-Regel.

LEMMA 1. Jede der Formeln (1)-(4) ist $\mathbb{R}$-linear in f.

BW Ersetzt man f durch eine $\mathbb{R}$-Linearkombination $f_1 + r\cdot f_2$, wo $r \in \mathbb{R}$, dann zerfällt die rechte Seite in die jeweils entsprechende Linearkombination . ∎

LEMMA 2 Sei $\delta(f)$ der Grad der Polynomfunktion f. Für die folgenden Werte von $\delta(f)$ sind die Formeln (I)-(IV) exakt:

(1) $\delta(f) \leq 1$; (2) $\delta(f) \leq 1$; (3) $\delta(f) \leq 3$; (4) $\delta(f) \leq 3$.

BW Wegen LEMMA 1 genügt es, den Beweis in jedem Fall für die Polynomfunktionen 1, x, x^2, x^3 zu führen. Für $f(x) := x^3$ z.B. lautet der Beweis im Fall (IV) unter Auslassung einfacher algebraischer Umformungen

$$FL_{GA}(x^3,[a,b]) := \frac{b-a}{8}\left[a^3+3\left(\frac{2a+b}{3}\right)^2+3\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2+b^3\right] = \ldots =$$

$$= \frac{b-a}{4}\left[a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3\right] = \frac{b^4-a^4}{4} = \int_a^b x^3 dx.$$

Ebenso einfach verlaufen die anderen Verifikationen. ∎

Wir teilen nun das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta x := \frac{1}{n}(b-a)$, wobei wir für n die jeweils geeignete Teilbarkeit (durch 2 bzw. 3) postulieren.

SATZ A (I)

$$FL_{TR}^{(n)}(f,[a,b]) = \Delta x\left[\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)+\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)+\dots+(y_{n-1}+y_n)\right]$$
$$= \frac{b-a}{2n}\left[(y_0+y_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

(II)

$$FL_{RE}^{(n)}(f,[a,b]) = \Delta x\left[2y_1+2y_3+\dots+2y_i+\dots+2y_{n-1}\right]$$

$(n \equiv 0 \text{ MOD}2)$

$$= 2\,\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} y_{2i+1}$$

(III)

$$FL_{SI}^{(n)}(f,[a,b]) = \frac{\Delta x}{3}\left[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\dots+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)\right]$$

$(n \equiv 0 \text{ MOD}2)$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[(y_0+y_n)+4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} y_{2i+1}+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} y_{2i}\right]$$

(IV)

$$FL_{GA}^{(n)}(f,[a,b]) = \frac{\Delta x}{8}\left[(y_0+3y_1+3y_2+y_3)+(y_3+3y_4+3y_5+y_6)+\dots+\right.$$
$$\left.+(y_{n-3}+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n)\right]$$

$(n \equiv 0 \text{ MOD}3)$

$$= \frac{b-a}{8n}\left[(y_0+y_n)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} y_{3i}+3\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1}(y_{3i+1}+y_{3i+2})\right]$$

§3. FEHLERABSCHÄTZUNGEN

Wie schon oben angedeutet, ist eine einigermaßen korrekte Fehlerabschätzung die sehr wünschenswerte Voraussetzung für die Verwendbarkeit der numerischen Integration im Rahmen der Entwicklung des Integralbegriffs. Gerade diese Fehlerabschätzung bietet aber die vergleichsweise größten mathematischen Schwierigkeiten. Wir erläutern deshalb zunächst zwei Hilfsresultate, bevor wir mit Hilfe der Taylor-Formel eine solche Abschätzung vornhemen.

LEMMA 3 (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei f stetig auf $[a,b]$ und sei g Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ wobei $g \geq 0$ oder $g \leq 0$ gilt. Dann existiert $c \in [a,b]$, so daß $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

BW Sei m_0 das Minimum, m_1 das Maximum von f auf $[a,b]$. Angenommen $g \geq 0$; der Fall $g \leq 0$ wird analog bewiesen.
Aus $m_0 g(x) \leq f(x)g(x) \leq m_1 g(x)$ folgt

$$m_0 \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq m_1 \int_a^b g(x)\,dx,$$

so daß $m_0 \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq m_1$. Da f stetig ist,

existiert also ein c mit $f(c)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

LEMMA 4 Sei f stetig auf $[a,b]$ seien $x_1,\dots,x_k$ beliebige Werte in $[a,b]$ und $n_1,\dots,n_k$ nicht-negative Zahlen. Dann existiert ein $d \in [a,b]$, so daß

$$\sum_{i=1}^{k} n_i f(x_i) = f(d) \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

BW Seien m_0 und m_1 das Minimum bzw. Maximum von f auf $[a,b]$. Es gilt

$$m_0 \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} n_i m_0 \leq \sum_{i=1}^{k} n_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} n_i m_1 = m_1 \sum_{i=1}^{k} n_i \quad \text{oder}$$

$$m_0 \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} n_i f(x_i)\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i\Big) \leq m_1;$$

also existiert ein d, wie behauptet. ▮

BEMERKUNG Der Sachverhalt, den LEMMA 4 beschreibt, läßt sich leicht so formulieren: ein gewichtetes Mittel von f auf $[a,b]$ ist immer ein Funktionswert.

Wir können nun zunächst die einfache, dann die allgemeine Fehlerabschätzung durchführen.

<u>LEMMA 5</u> Sei f auf einem offenen Intervall, das $[a,b]$ enthält, 2-mal bzw. 4-mal stetig differenzierbar und seien M_2 bzw. M_4 Schranken für $|f''|$ bzw. $|f^{(IV)}|$ auf $[a,b]$. Dann gelten die folgenden Abschätzungen:

(1) $\left|\int_a^b f(x)dx - FL_{TR}(f,[a,b])\right| \leq M_2(b-a)^3/6$

(2) $\left|\int_a^b f(x)dx - FL_{RE}(f,[a,b])\right| \leq M_2(b-a)^3/24$

(3) $\left|\int_a^b f(x)dx - FL_{SI}(f,[a,b])\right| \leq M_4(b-a)^5/720$

(4) $\left|\int_a^b f(x)dx - FL_{GA}(f,[a,b])\right| \leq M_4(b-a)^5/810$

<u>BW</u> Für (1) und (2) verwenden wir die Taylor-Formel

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o^*)}{2!}(x-x_o)^2,$$

wo $x_o := \frac{a+b}{2}$ und $x_o < x_o^* < x$ oder $x < x_o^* < x_o$.

(1) Wegen LEMMA 1 und LEMMA 2 gilt:

$$\left|\int_a^b f - FL_{TR}(f,[a,b])\right| = \left|\int_a^b \frac{f''(x_o^*)}{2!}(x-x_o)^2\,dx - FL_{TR}\left(\frac{f''(x_o^*)}{2!}(\cdot - x_o)^2,[a,b]\right)\right|$$

$$\text{(LEMMA 3)} \quad = \left|\frac{f''(c)}{2!3}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b - \frac{b-a}{2!2}\left[f''(a^*)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2 + f''(b^*)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\right.$$

(wo $a < a^* < \frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2} < b^* < b$)

$$= \frac{f''(c)}{2!3\cdot 2^3}\cdot 2(b-a)^3 - \frac{b-a}{2\cdot 2!\cdot 2^2}\left[f''(a^*)(a-b)^2 + f''(b^*)(b-a)^2\right]$$

$$\text{(LEMMA 4)} \quad = \frac{(b-a)^3}{2!2^2}\left|\frac{1}{3}f''(c) - \frac{1}{2}[2f''(d)]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{2!\cdot 2^2\cdot 3}\left(|f''(c)| + |3f''(d)|\right) \leq \frac{4M_2}{2!\cdot 4\cdot 3}(b-a)^3 = \frac{M_2}{6}(b-a)^3$$

(2) analog zu (1)

Für (3) und (4) verwenden wir die Taylor-Formel

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \frac{f'''(x_o)}{3!}(x-x_o)^3 + \frac{f^{(IV)}(x_o^*)}{4!}(x-x_o)^4$$

Wegen LEMMA 1 und LEMMA 2 gilt

$$\left|\int_a^b f - FL_{SI}(f,[a,b])\right| = \left|\int_a^b \frac{f^{(IV)}(x_o^*)}{4!}(x-x_o)^4\,dx - FL_{SI}\left(\frac{f^{(N)}(x_o^*)}{4!}\right)(x-x_o),[a,b])\right|$$

(LEMMA 3)
$$= \left| \frac{f^{(IV)}(c)}{4!5}\left[(x-\frac{a+b}{2})^5\right]_a^b - \frac{b-a}{4!6}\left[f^{(IV)}(a^*)(a-\frac{a+b}{2})^4 + f^{(IV)}(b^*)(b-\frac{a+b}{2})^4\right]\right.$$

$$= \left| \frac{f^{(IV)}(c)}{4!5\cdot 2^5}\,2\cdot(b-a)^5 - \frac{b'-a}{4!6\cdot 2^4}\left[f^{(IV)}(a^*)\,(a-b)^4 + f^{(IV)}(b^*)(b-a)^4\right]\right|$$

(LEMMA 4)
$$= \frac{(b-a)^5}{4!2^4}\left|\frac{1}{5}f^{(IV)}(c) - \frac{1}{6}\left[2\,f^{(IV)}(d)\right]\right|$$

$$= \frac{(b-a)^5}{4!2^4\cdot 5\cdot 3}\left(\left|3\,f^{(IV)}(c)\right| + 5\left|f^{(IV)}(d)\right|\right)$$

$$< \frac{(b-a)^5}{4!2^4\cdot 5\cdot 3}\;8\,M_4 = \frac{M_4}{720}(b-a)^5$$

(4) analog zu (3).∎

Im allgemeinen Fall wenden wir nun jede dieser Abschätzungen auf jedes Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ an, ersetzen aber die Schranken auf den Teilintervallen jeweils durch M_2 bzw. M_4.

SATZ B Sei f auf einem offenen Intervall, das $[a,b]$ enthält, 2-mal bzw. 4-mal stetig differenzierbar und seien M_2 bzw. M_4 Schranken für f'' bzw. $f^{(IV)}$ auf $[a,b]$. Dann gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\text{(I)}\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - FL_{TR}^{(n)}(f,[a,b])\right| \le M_2(b-a)^3/6\,n^2$$

$$\text{(II)}\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - FL_{RE}^{(n)}(f,[a,b])\right| \le M_2(b-a)^3/24\,n^2 \qquad (n \equiv 0 \text{ MOD } 2)$$

$$\text{(III)}\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - FL_{SI}^{(n)}(f,[a,b])\right| \leq M_4\,(b-a)^5/720\,n^2 \qquad (n \equiv 0 \text{ MOD } 2)$$

$$\text{(IV)}\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - FL_{GA}^{(n)}(f,[a,b])\right| \leq M_4\,(b-a)^5/810\,n^2 \qquad (n \equiv 0 \text{ MOD } 3)$$

BW z.B.(III): Für $[x_{i-1},x_i]$ gilt

$$\left|\int_{x-1}^{x_i} f(x)\,dx - FL_{SI}^{(n)}(f,[x_{i-1},x_i])\right| < M_4(\Delta x)^5/720.$$

Da $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-1}^{x_1} f(x)\,dx$ und $FL_{SI}^{(n)}(f,[a,b]) = \sum_{i=1}^{n} FL_{SI}^{(n)}(f,[x_{i-1},x_\bullet])$,

folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $\Delta x = (b-a)/n$ und aus der Dreiecksungleichung, für den Absolutbetrag .

BEMERKUNG Bei Verwendung von Taylor Reihen ergeben sich zum Teil andere Konstanten (siehe [1]).

§4. BEISPIELE UND UNTERRICHTSVORSCHLÄGE

Das Hauptproblem für die Anwendung im Unterricht lautet:
"Wie kann für eine vorgegebene Funktion f auf $[a,b]$, der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit approximiert werden?"

In symbolischer Form:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - FL_{\blacksquare}^{(n)}(f,[a,b])\right| \leq FE,$$

wo FE eine positive reelle Zahl ("Fehlerschranke") und n die Anzahl der Intervalle ("Schrittzahl") bedeutet? (steht für eines der Symbole TR, RE, SI oder GA). Zu vorgegebenem FE ist also n so zu bestimmen, daß die obige Ungleichung gilt.

Hinreichend dafür ist offensichtlich die Bedingung

$$\text{FEHLER} \leq FE,$$

wo FEHLER für die jeweils rechte Seite der Abschätzungen im SATZ B steht. In den 4 angesprochenen Fällen bedeutet das also:

$$\text{(I)}\quad M_2(b-a)^3/6n^2 \leq FE \iff n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{6\,FE}}$$

$$\text{(II)}\quad M_2(b-a)^3/24n^2 \leq FE \iff n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\,FE}} \qquad (n \equiv 0 \text{ MOD } 2)$$

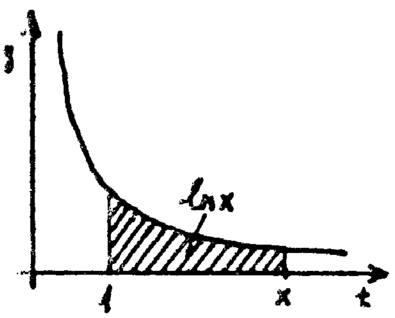
$$\text{(III)}\quad M_4(b-a)^5/720n^4 \leq FE \iff n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{720\,FE}} \qquad (n \equiv 0 \text{ MOD } 2)$$

$$\text{(IV)}\quad M_4(b-a)^5/810n^4 \leq FE \iff n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{810\,FE}} \qquad (n \equiv 0 \text{ MOD } 3)$$

Daraus oder aus SATZ B direkt sieht man, daß (II) bei gleicher Schrittzahl doppelt so genau ist wie (I) und (IV) etwas genauer als (III).

Die wirkliche Schwierigkeit liegt in der Ermittlung von M_2 bzw. M_4. Falls aber f'' bzw. $F^{(IV)}$ monoton ist (z.B wenn $f''' \geq 0$ oder $f''' \leq 0$ bzw. $f^{(V)} \geq 0$ oder $f^{(V)} \leq 0$), kann natürlich M_2 bzw. M_4 als $f''(b)$ bzw. $f^{(IV)}(b)$ oder $f''(a)$ bzw. $F^{(IV)}(a)$ gewählt werden. Dazu geben wir mehrere Beispiele.

BEISPIEL 1 (Logarithmentafel) Es ist $\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}$.



Hier ist a:= 1, b:= x. Sei FE:= 0.00005 (vierstellig!)

Bei Anwendung von (III) muß man zunächst M_4 ermitteln. Es ist $(\frac{1}{t})^{(V)} = -\frac{5!}{t^6} < 0$.

Also ist $(\frac{1}{t})^{(IV)}$ monoton fallend und $M_4 = (\frac{1}{t})^{(IV)}\big|_{t=1} = 4! = 24$ zu wählen.

Dann gilt $n > \sqrt[4]{\frac{24(x-1)^5}{720 \cdot 0.00005}}$. Für x:= 10 ergibt sich $n > \sqrt[4]{\frac{24.9^5}{720 \cdot 0.00005}} = 79.21$

Da $n \equiv 0$ MOD 2 gelten muß, kann n = 80 gewählt werden. Für die Berechnung einer Logarithmentafel ist diese Methode natürlich zu zeitaufwendig.

Für x: = 100 und FE:= 0.01 ergibt sich n = 422.

BEISPIEL 2 Durch $f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ ist die Dichte der Standardnormalverteilung definiert. Die (in Tabellenform angegebene) Normalverteilungsfunktion ist dann

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = .5 + \int_{0}^{x} f(t)\,dt, \quad \text{wo}$$

f monoton fällt, da $t \geq 0$. Wir berechnen $\Phi(x)$ mit Hilfe von (II). Der Leser möge selbst verifizieren, daß hier $M_2 = (\sqrt{2\pi}\, e^{1.5})^{-1} = 0.1780$ gewählt werden kann. Sei FE:= 0.001, a:= 0, b:= 10. Dann muß $n \geq 136.36, \ldots$, also $n \geq 138$ gewählt werden.

BEISPIEL 3 Die Zahl π kann als $8 \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-t^2}\, dt$ definiert werden. Man sieht nach kurzer Rechnung, daß $M_2 = 2\sqrt{2}$ gewählt werden kann. Sei FE: = 0.001. Da a = 0 und $b = 1/\sqrt{2}$, ist $n \geq \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2\ 24.0001}\ \frac{1}{\sqrt{2}}} = 6.4549 \ldots$, also $n \geq 8$ zu wählen, damit (II) anwendbar wird.

SCHLUSSBEMERKUNG:

Eine Abschätzung der Schranken M_2 bzw. M_4 kann natürlich auch mit Hilfe der Methode der Numerischen Differentiation vorgenommen werden; das würde allerdings den Einsatz anderer Methoden und eine disproportionale Erhöhung der Rechenarbeit mit sich bringen.

LITERATUR

[1] Richardson, G.P.: Reconsidering Area Approximations, The American Mathematical Monthly, Vol. 95, Nr. 8, 754-757, 1988.

[2] Saff, E.B. und Snader, J.C.: The Error for quadrative Methods, A Complex Variables Approach, The American Mathematical Monthly, Vol. 94, Nr. 2, 175-180, 1987.